第 12 卷第 9 期 南阳师范学院学报 Vol. 12 No. 9
2013 年 9 月 Journal of Nanyang Normal University Sep. 2013

关于 Smarandache 双阶乘对偶函数的二次均值

王 阳

(南阳师范学院 数学与统计学院，河南 南阳 473061)

摘 要: 借助 $\ln(n!!)$ 的渐近性质，利用初等方法探究了 Smarandache 双阶乘对偶函数 $S^{**}(n)$ 的二次均值，得到了 $\sum_{n\leqslant x}(S^{**}(n))^2$ 的渐近公式，补充了有关文献的结论.

关键词: Smarandache 双阶乘对偶函数; 均值; 渐近公式

中图分类号: O 156 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671 - 6132(2013) 09 - 0001 - 03

1 引言及结论

对任意的正整数 n，著名的 Smarandache 对偶函数 $S^*(n)$ 定义为最大的正整数 m 使得 $m!$ 整除 n. 即

$$S^*(n) = \max\{m: m\in\mathbb{N}_+, m! \mid n\}.$$

关于 $S^*(n)$ 的性质，文献 [1 - 4] 进行了研究. 2007 年，苟素首先在文献 [5] 中给出了 Smarandache 双阶乘对偶函数 $S^{**}(n)$ 的定义. 即当 n 为偶数时，$S^{**}(n)$ 为最大的正整数 $2m$，使得 $(2m)!!$ 整除 n; 当 n 为奇数时，$S^{**}(n)$ 为最大的正整数 $2m-1$，使得 $(2m-1)!!$ 整除 n. 也就是

$$S^{**}(n) = \begin{cases}\max\{2m: (2m)!! \mid n, m\in\mathbb{N}_+\}, & 2\mid n;\\ \max\{2m-1: (2m-1)!! \mid n, m\in\mathbb{N}_+\}, & 2\nmid n.\end{cases}$$

其中 $(2m)!! = 2\times4\times6\cdots\times(2m)$，$(2m-1)!! = 1\times3\times5\cdots\times(2m-1)$. 显然由定义可得

$$S^{**}(1) = 1, S^{**}(2) = 2, S^{**}(3) = 3, S^{**}(4) = 2, S^{**}(5) = 1, S^{**}(6) = 2, \cdots$$

关于 Smarandache 双阶乘对偶函数 $S^{**}(n)$ 的性质已有学者进行了初步的研究. 其中文献 [5] 利用初等方法研究了实数 $s>1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}$ 的收敛性，得到了一个重要的恒等式; 文献 [6] 利用 $\sin^n x$ 的定积分与 $n!!$ 的关系研究了 $S^{**}(n)$ 的一次均值; 文献 [7] 探究了方程 $S^{**}(n) = n$，$(S^{**}(n))^2 = n$ 及 $S^{**}(n) = \varphi(n)$ (其中 $\varphi(n)$ 为 Euler 函数) 的可解性，并用初等方法给出了方程所有正整数解; 文献 [8] 研究了 $S^{**}(n)$ 与 Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$ 构成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)S^{**}(n)}{n^s}$ 的收敛性，探究了该级数与 Riemann Zeta-函数之间的关系. 本文利用初等方法探究了 $S^{**}(n)$ 的二次均值，得到了 $\sum_{n\leqslant x}(S^{**}(n))^2$ 的渐近公式，也就是证明了如下定理.

定理 对任意的实数 $x>1$，我们有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S^{**}(n))^2 = \frac{13}{2}x + O\Big(\big(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\big)^3\Big).$$

2 引理

为了完成定理的证明，我们需要下列引理.

引理 1 设实数 $x>1$，对任意的正整数 k，当 $(2k)!! \leqslant x < (2k+2)!!$ 时，我们有渐近公式

$$k = \frac{\ln x}{\ln\ln x} + O\Big(\frac{\ln x\ln\ln\ln x}{(\ln\ln x)^2}\Big).$$

收稿日期: 2013 - 04 - 20

基金项目: 河南省科技厅基础与前沿研究项目(132300410372)

作者简介: 王阳(1962 -)，女，河南南阳人，教授，主要从事数论研究.

证明：显然 $(2k)!! = 2^k k!$，$(2k+2)!! = 2^{k+1}(k+1)!$. 因此当 $(2k)!! \leqslant x < (2k+2)!!$ 时，我们有

$$k\ln 2 + \sum_{i=1}^{k}\ln i \leqslant \ln x < (k+1)\ln 2 + \sum_{i=1}^{k+1}\ln i.$$

由文献[9]知

$$\sum_{i=1}^{k}\ln i = \left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k+1) - k - 1 + C + O\left(\frac{1}{k}\right) = k\ln k - k + O(k),$$

$$\sum_{i=1}^{k+1}\ln i = \left(k+1+\frac{1}{2}\right)\ln(k+2) - k - 2 + C + O\left(\frac{1}{k}\right) = k\ln k - k + O(k),$$

所以

$$\ln x = k\ln k + k\ln 2 - k + O(\ln k). \tag{1}$$

因此

$$\ln\ln x = \ln[k\ln k + k\ln 2 - k + O(\ln k)] = \ln k + \ln\left[\ln k + \ln 2 - 1 + O\left(\frac{\ln k}{k}\right)\right] =$$

$$\ln k + \ln\left\{\ln k\left[1 - \frac{1-\ln 2}{\ln k}\right] + O\left(\frac{1}{k}\right)\right\} = \ln k + \ln\ln k + \ln\left[1 - \frac{1-\ln 2}{\ln k} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right] =$$

$$\ln k + \ln\ln k + O\left(\frac{1}{\ln k}\right).$$

从而

$$\ln k = \ln\ln x - \ln\ln k + O\left(\frac{1}{\ln k}\right). \tag{2}$$

$$\ln\ln k = \ln\left\{\ln\ln x - \ln\ln k + O\left(\frac{1}{\ln k}\right)\right\} = \ln\{\ln\ln x + O(\ln\ln k)\} =$$

$$\ln\left\{\ln\ln x\left[1 + O\left(\frac{\ln\ln k}{\ln\ln x}\right)\right]\right\} = \ln\ln\ln x + O(1). \tag{3}$$

由(1)(2)(3)可得

$$k = \frac{\ln x}{\ln k - 1 + \ln 2} + O\left(\frac{\ln k}{\ln k - 1 + \ln 2}\right) = \frac{\ln x}{\ln\ln x - \ln\ln k - 1 + \ln 2 + O\left(\frac{1}{\ln k}\right)} + O\left(\frac{\ln k}{\ln k - 1 + \ln 2}\right) =$$

$$\frac{\ln x}{\ln\ln x}\cdot\frac{1}{1 - \frac{\ln\ln k + 1 - \ln 2 + O\left(\frac{1}{\ln k}\right)}{\ln\ln x}} + O\left(\frac{\ln k}{\ln k - 1 + \ln 2}\right) = \frac{\ln x}{\ln\ln x}\cdot\left[1 + \frac{\ln\ln k + 1 - \ln 2 + O\left(\frac{1}{\ln k}\right)}{\ln\ln x}\right] + O(1) =$$

$$\frac{\ln x}{\ln\ln x}\cdot\left[1 + \frac{\ln\ln\ln x + O(1)}{\ln\ln x}\right] + O(1) = \frac{\ln x}{\ln\ln x} + O\left(\frac{\ln x\ \ln\ln\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right).$$

因此引理 1 可证.

同理可证

引理 2　设实数 $x > 1$，则对任意的正整数 k，当 $(2k-1)!! \leqslant x < (2k+1)!!$ 时，我们有渐近公式

$$k = \frac{\ln x}{\ln\ln x} + O\left(\frac{\ln x\ \ln\ln\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right).$$

3　定理的证明

下面我们将完成定理的证明.

当 n 为偶数时，设 $S^{**}(n) = 2m$. 由 Smarandache 双阶乘对偶函数 $S^{**}(n)$ 的定义可得：$(2m)!! \mid n$，因此 $n = (2m)!!u$，其中 $2m+2 \nmid u$. 当 $n \leqslant x$ 时，必有 $(2m)!! \leqslant x < (2m+2)!!$. 由引理 1 我们可知

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ 2\mid n}}(S^{**}(n))^2 = \sum_{\substack{n\leqslant x\\ S^{**}(n)=2m}}(S^{**}(n))^2 = \sum_{\substack{(2m)!!u\leqslant x\\ 2m+2\nmid u}}(2m)^2 = \sum_{(2m)!!\leqslant x}(2m)^2\sum_{\substack{u\leqslant \frac{x}{(2m)!!}\\ 2m+2\nmid u}}1 =$$

$$\sum_{(2m)!!\leqslant x}(2m)^2\left[\frac{x}{(2m)!!} - \frac{x}{(2m+2)!!}\right] + O\left(\sum_{(2m)!!\leqslant x}(2m)^2\right) =$$

$$x\sum_{(2m)!!\leqslant x}\left[\frac{(2m)^2}{(2m)!!}-\frac{(2m)^2}{(2m+2)!!}\right]+O\Big(\sum_{(2m)!!\leqslant x}(2m)^2\Big)=$$

$$x\sum_{m\leqslant\frac{\ln x}{\ln\ln x}}\left[\frac{(2m)^2}{(2m)!!}-\frac{(2m)^2}{(2m+2)!!}\right]+O\left(\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^2\frac{\ln x\ln\ln\ln\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right)+O\Big(\sum_{m\leqslant\frac{\ln x}{\ln\ln x}}(2m)^2\Big)=$$

$$x\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(2m)^2}{(2m)!!}-\frac{(2m)^2}{(2m+2)!!}\right]+O\left(x\sum_{(2m)!!>x}\frac{(2m)^2}{(2m)!!}\right)+O\left(x\sum_{(2m)!!>x}\frac{(2m)^2}{(2m+2)!!}\right)+O\left(\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^3\right)=$$

$$x\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(2m)^2}{(2m)!!}-\frac{(2m)^2}{(2m+2)!!}\right]+O\left(\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^3\right).$$

由于

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(2m)^2}{(2m)!!}-\frac{(2m)^2}{(2m+2)!!}\right]=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)^2}{(2m)!!}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)^2}{(2m+2)!!}=2+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m+2)^2-(2m)^2}{(2m+2)!!}=$$

$$2+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m+1}{(2m+2)!!}=2+4\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2m)!!}-\frac{1}{(2m+2)!!}\right]=4.$$

从而

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\2|n}}(S^{**}(n))^2=4x+O\left(\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^3\right). \tag{4}$$

若 $S^{**}(n)=2m-1$，**则** $(2m-1)!!\mid n$，**因此** $n=(2m-1)!!v$，**其中** $2m+1\nmid v$，**且** $2\nmid v$. **当** $n\leqslant x$ **时，必有** $(2m-1)!!\leqslant x<(2m+1)!!$. **由引理** 2 **我们可得**

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\2\nmid n}}(S^{**}(n))^2=\sum_{\substack{n\leqslant x\\S^{**}(n)=2m-1}}(S^{**}(n))^2=\sum_{\substack{(2m-1)!!v\leqslant x\\2m+1\nmid v\\2\nmid v}}(2m-1)^2=\sum_{(2m-1)!!\leqslant x}(2m-1)^2\sum_{\substack{v\leqslant\frac{x}{(2m)!!}\\2m+1\nmid v\\2\nmid v}}1=$$

$$\sum_{(2m-1)!!\leqslant x}(2m-1)^2\left[\frac{x}{2(2m-1)!!}-\frac{x}{2(2m+1)!!}\right]+O\Big(\sum_{(2m-1)!!\leqslant x}(2m-1)^2\Big)=$$

$$\frac{x}{2}\sum_{(2m-1)!!\leqslant x}\left[\frac{(2m-1)^2}{(2m-1)!!}-\frac{(2m-1)^2}{(2m+1)!!}\right]+O\Big(\sum_{(2m-1)!!\leqslant x}(2m-1)^2\Big)=$$

$$\frac{x}{2}\sum_{m\leqslant\frac{\ln x}{\ln\ln x}}\left[\frac{(2m-1)^2}{(2m-1)!!}-\frac{(2m-1)^2}{(2m+1)!!}\right]+O\left(\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^2\frac{\ln x\ln\ln\ln\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right)+O\Big(\sum_{m\leqslant\frac{\ln x}{\ln\ln x}}(2m-1)^2\Big)=$$

$$\frac{x}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(2m-1)^2}{(2m-1)!!}-\frac{(2m-1)^2}{(2m+1)!!}\right]+O\left(x\sum_{(2m-1)!!>x}\frac{(2m-1)^2}{(2m-1)!!}\right)+O\left(x\sum_{(2m-1)!!>x}\frac{(2m-1)^2}{(2m+1)!!}\right)+O\left(\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^3\right)=$$

$$\frac{x}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(2m-1)^2}{(2m-1)!!}-\frac{(2m-1)^2}{(2m+1)!!}\right]+O\left(\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^3\right).$$

又

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(2m-1)^2}{(2m-1)!!}-\frac{(2m-1)^2}{(2m+1)!!}\right]=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)^2}{(2m-1)!!}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)^2}{(2m+1)!!}=$$

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m+1)^2-(2m-1)^2}{(2m+1)!!}=1+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m}{(2m+1)!!}=1+4\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2m-1)!!}-\frac{1}{(2m+1)!!}\right]=5.$$

所以

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\2\nmid n}}(S^{**}(n))^2=\frac{5}{2}x+O\left(\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^3\right). \tag{5}$$

根据(4)(5)，**我们可得**

$$\sum_{n\leqslant x}(S^{**}(n))^2=\sum_{\substack{n\leqslant x\\2|n}}(S^{**}(n))^2+\sum_{\substack{n\leqslant x\\2\nmid n}}(S^{**}(n))^2=\frac{13}{2}x+O\left(\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^3\right).$$

参 考 文 献

[1] Sandor J. On certain generalizaction of Smarandche function [J]. Smarandche Notion Journal, 2000(11): 202-212.

单位圆内亚纯函数的 Borel 点与唯一性

吴　佳

(咸宁职业技术学院，湖北 咸宁 437100)

摘　要： 研究了单位圆内亚纯函数的 Borel 点与唯一性之间的关系，证明了单位圆内的两个不恒等的无限级亚纯函数在包含 Borel 点的任意角域内至多 IM 分担 4 个不同的值.

关键词： 分担值；Borel 点；单位圆；无限级

中图分类号： O 174.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671－6132(2013)09－0004－03

1　引言和主要结果

设 $f(z)$ 是单位圆内的亚纯函数，本文采用 Nevanlinna 理论的一般记号[1]. 自从 Nevanlinna 建立了亚纯函数的两个基本定理之后，关于亚纯函数的 Nevanlinna 值分布理论被广泛地应用于复分析的其他分支，一个代表性的分支是亚纯函数的唯一性理论[2]. 最近，郑建华[3-4]首次研究了两个亚纯函数在角域内满足分担值条件的唯一性，推广了平面上的一些唯一性定理. 吴昭君和孙道椿[5]研究了单位圆内亚纯函数在角域内的唯一性问题. 在此，我们引用文献[5]中关于分担值的定义如下：

用 D 表示单位圆 $\{|z|<1\}$. 设 $X\subseteq D$，$a\in\bar{\mathbb{C}}$，称定义在 D 上的两个亚纯函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在集合 X 内的分担值 a，若在集合 X 内，$f=a$ 当且仅当 $g=a$，并用 CM 表示计重数，IM 表示不计重数. 当 $X=D$ 时，即称 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在单位圆内的分担值 a. 关于单位圆内亚纯函数的唯一性的研究结果，可以参见文献[6]. 本文将研究单位圆内亚纯函数的 Borel 点和唯一性之间的关系.

设 $f(z)$ 是单位圆内的亚纯函数，定义函数 f 的级为

[2] Le Maohua. A conjecture concerning the Smarandche dual function [J]. Smarandche Notion Journal, 2004(14): 153－155.

[3] Li Jie. On Smarandche dual function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 111－113.

[4] Xue Shejiao. On the Smarandche dual function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 29－32.

[5] 苟素，杜晓英. 关于 Smarandache 对偶函数 [J]. 纯粹数学与应用数学，2008, 24(1): 17－20.

[6] 杨衍婷. 一个数论函数的均值问题 [J]. 黑龙江大学学报：自然科学版，2008, 25(3): 340－342.

[7] 王阳. 与 Smarandache 双阶乘对偶函数有关的方程 [J]. 南阳师范学院学报，2010, 9(3): 1－3.

[8] 王阳. Smarandache 双阶乘对偶函数的恒等式 [J]. 南阳师范学院学报，2012, 11(12): 11－13.

[9] Tom M A. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976: 237.

On the quadratic mean value of the Smarandache double factorial dual function

WANG Yang

(*School of Mathematics and Statistics*, *Nanyang Normal University*, *Nanyang* 473061, *China*)

Abstract: The quadratic mean value of the Smarandache double factorial dual function $S^{**}(n)$ is studied, an asymptotic formula is obtained by using elementary methods and the asymptotic properties of $\ln(n!!)$, and supplements related conclusions in some references.

Key words: Smarandache double factorial dual function; mean value; asymptotic formula

收稿日期： 2013－05－10

作者简介： 吴佳(1980－　)，女，湖北咸宁人，讲师，主要从事数学与计算机的相关研究.